第 4 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定

PART1　2次関数の最大・最小

1　関数 $f(x)=x^2-4x-5$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値 $m(a)$ を求めよ。　　(2)　最大値 $M(a)$ を求めよ。

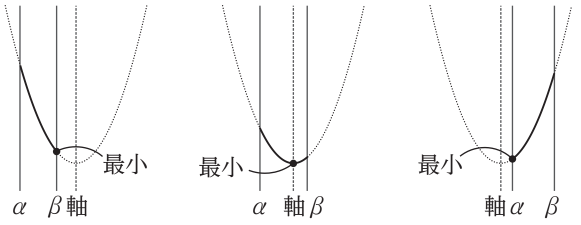
Point Pickup

グラフが下に凸の放物線である 2 次関数 $y=f(x)$ の $\alpha \leqq x \leqq \beta$ における最大・最小について

最小値は，グラフの軸が

・$\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内にあれば，
　頂点の y 座標

・$\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内になければ，
　軸に近い方の端点の y 座標

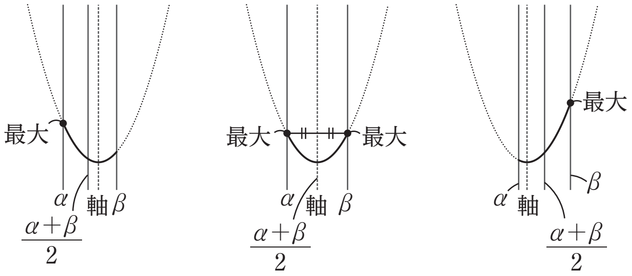


最大値は，

軸から遠い方の端点の y 座標

(軸が区間の中央 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より

左か右か)



第 4 講　PART1　確認問題

関数 $f(x)=x^2-2x+3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

1 最小値 $m(a)$ を求めよ。

$a <$ [ア] のとき　$m(a)=$ [イ]

[ア] $\leqq a \leqq$ [ウ] のとき　$m(a)=$ [エ]

[ウ] $< a$ のとき　$m(a)=$ [オ]

[[イ], [エ], [オ] の選択肢]

① $\dfrac{9}{4}$　② 2　③ 3

④ a^2+2　⑤ $a^2-a+\dfrac{5}{4}$

⑥ a^2-2a+3

2 最大値 $M(a)$ を求めよ。

$a<\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ のとき　$M(a)=\boxed{ク}$

$a=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ のとき　$M(a)=\boxed{ケ}$

$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}<a$ のとき　$M(a)=\boxed{コ}$

[$\boxed{ク}$ ～ $\boxed{コ}$ の選択肢]

① $\dfrac{9}{4}$　② 2　③ 3

④ a^2+2　⑤ $a^2-a+\dfrac{5}{4}$

⑥ a^2-2a+3

【MEMO】

第 4 講　２次関数の最大・最小，２次関数の決定

PART1　2次関数の最大・最小

1　関数 $f(x)=x^2-4x-5$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値 $m(a)$ を求めよ。　　(2)　最大値 $M(a)$ を求めよ。

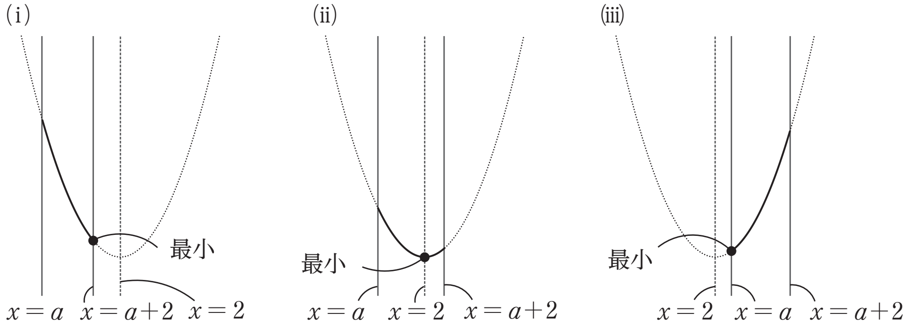
$f(x)=x^2-4x-5=(x-2)^2-9$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$

(1)　(i)　$a+2<2$ つまり $a<0$ のとき　$m(a)=f(a+2)=a^2-9$

(ii)　$a \leqq 2 \leqq a+2$ つまり $0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$m(a)=f(2)=-9$

(iii)　$2<a$ のとき　$m(a)=f(a)=a^2-4a-5$



(i)～(iii)より

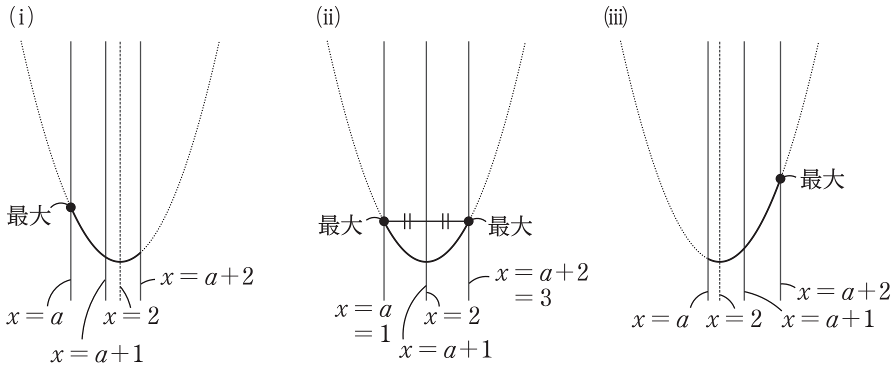
$$m(a)=\begin{cases} a^2-9 & (a<0) \\ -9 & (0 \leqq a \leqq 2) \\ a^2-4a-5 & (2<a) \end{cases}$$

(2)　区間 $a \leqq x \leqq a+2$ の中央は $x=a+1$

(i)　$a+1<2$ つまり $a<1$ のとき　$M(a)=f(a)=a^2-4a-5$

(ii)　$a+1=2$ つまり $a=1$ のとき　$M(a)=f(1)=f(3)=-8$

(iii)　$2<a+1$ つまり $1<a$ のとき　$M(a)=f(a+2)=a^2-9$



(i)～(iii)より

$$M(a)=\begin{cases} a^2-4a-5 & (a<1) \\ -8 & (a=1) \\ a^2-9 & (1<a) \end{cases}$$

第 4 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：0，イ：④，ウ：1，エ：②，オ：⑥

[解説]

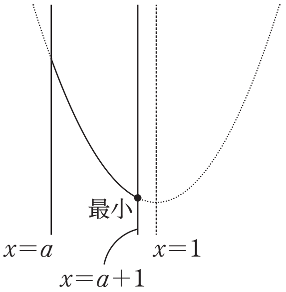
$$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，

軸は直線 $x=1$

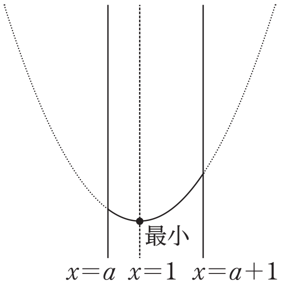
(i)　$a+1<1$ つまり $a<0$ のとき **[A]**

$m(a)=f(a+1)=a^2+2$



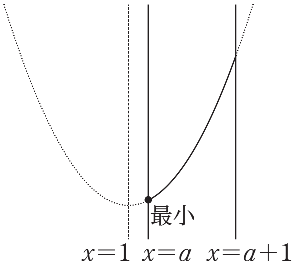
(ii)　$a \leqq 1 \leqq a+1$ つまり $0 \leqq a \leqq 1$ のとき **[A]**

$m(a)=f(1)=2$

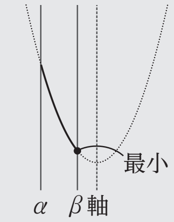


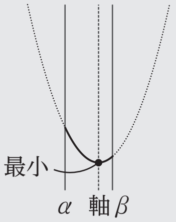
(iii)　$1<a$ のとき **[A]**

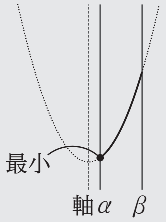
$m(a)=f(a)=a^2-2a+3$



[A]　グラフが下に凸の放物線である 2 次関数 $y=f(x)$ の区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ における最小値について，
グラフの軸が
- $\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内にあれば，頂点の y 座標
- $\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内になければ，軸に近い方の端点の y 座標







(i)〜(iii)より

$a<0$ のとき　$m(a)=a^2+2$

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$m(a)=2$

$1<a$ のとき　$m(a)=a^2-2a+3$

2 **[正解]** カ：1，キ：2，ク：⑥，ケ：①，コ：④

[解説]

$$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

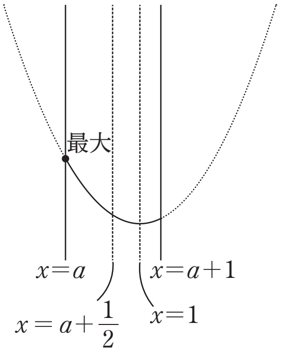
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，

軸は直線 $x=1$

区間 $a\leqq x\leqq a+1$ の中央は　$x=a+\dfrac{1}{2}$

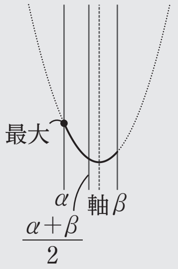
(i)　$a+\dfrac{1}{2}<1$ つまり $a<\dfrac{1}{2}$ のとき ◀[B]

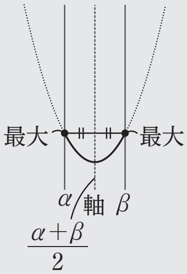
$M(a)=f(a)=a^2-2a+3$

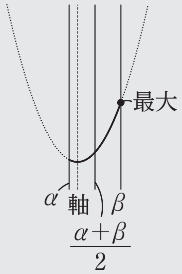


[B]　グラフが下に凸の放物線である 2 次関数 $y=f(x)$ の区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ における最大値は，グラフの軸から遠い方の端点の y 座標

(軸が区間の中央 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より左か右かによって場合分け)

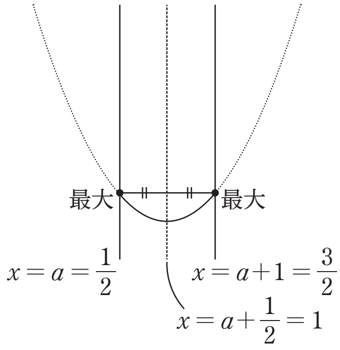






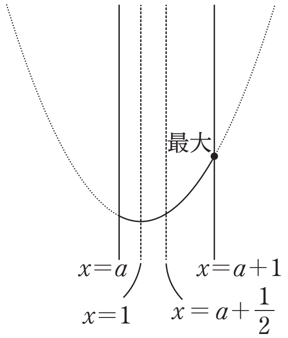
(ii)　$a+\dfrac{1}{2}=1$ つまり $a=\dfrac{1}{2}$ のとき [B]

$M(a)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$



(iii)　$1<a+\dfrac{1}{2}$ つまり $\dfrac{1}{2}<a$ のとき [B]

$M(a)=f(a+1)=a^2+2$



(i)〜(iii)より

$a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$M(a)=a^2-2a+3$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$M(a)=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{1}{2}<a$ のとき　$M(a)=a^2+2$